Résolution d'une EDO par DSE :

I Le développement

Le but de ce développement est de trouver des solutions d'une équation différentielle par développement en série entière. Cette méthode consiste à résoudre formellement avec une série entière une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux vérifiée par une fonction donnée.

Exemple 1 : [Berthelin, p.147]
Une solution de l'équation différentielle $(E) : (t^2+t)y''+(3t+1)y'+y=0$ est la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(t)=\frac{a_0}{1+t}$ (avec $a_0 \in \mathbb{R}$).

Preuve :
On considère l'équation différentielle $(E) : \left(t^2+t\right)y''+(3t+1)y'+y=0$.
$*$ Structure de l'ensemble des solutions :
Sur les intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ ou $]0;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}(E) &\iff y''+\frac{3t+1}{t(t+1)}y'+\frac{1}{t(t+1)}y=0\\ &\iff Y'=A(t)Y\end{aligned}$$

avec $Y=\begin{pmatrix}y\\y'\end{pmatrix}$ et $A : t\longmapsto\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{t(t+1)} & -\frac{3t+1}{t(t+1)}\end{pmatrix}$.

Or, A est continue sur chacun des intervalles, donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'espace des solutions sur chacun des intervalles est de dimension égale à 2.

$*$ Cherchons des solutions sous forme de série entière :
Soit f une solution de E développable en série entière et de rayon de convergence $R>0$.
On a alors

$$\forall t\in]-R;R[,\ f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$$

En tant que série entière, f est deux fois dérivable formellement terme à terme et on a :

$$\forall t\in]-R;R[,\ f'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1}\text{ et }f''(t)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$$

Donc puisque f est solution de (E), on a alors pour tout $t\in]-R;R[$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^n+\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}3na_nt^n+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n=0$$

Soit :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^n+\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)a_{n+1}t^n+\sum_{n=1}^{+\infty}3na_nt^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}t^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n=0$$

On a ainsi :

$$\begin{cases}a_0+a_1=0\\ a_1+2a_2+3a_1+2a_2=0\\ \forall n\geq 2,\ a_n+(n+1)a_{n+1}+3na_n+n(n+1)a_{n+1}+n(n-1)a_n=0\end{cases}$$

On obtient après réécriture de l'accolade que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n+a_{n+1}=0$ et par récurrence, on obtient que pour tout $n\in\mathbb{N},\ a_n=(-1)^na_0$.

Ainsi, on a :

$$\forall t\in]-R;R[,\ f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^na_0t^n=\frac{a_0}{1+t}\text{ (ce qui nous donne au passage que }R=1)$$

Réciproquement, on considère f_0 définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par $f_0(t)=\frac{a_0}{1+t}$.
La fonction f_0 est alors deux fois dérivable sur son domaine de définition et on vérifie que f_0 est solution de (E) sur $]-\infty;-1[$ ou $]-1;+\infty[$.

Finalement, on a $\mathbb{R}f_0\subseteq\mathcal{S}_{(E)}$ sur $]-\infty;-1[$ ou $]-1;+\infty[$.

$*$ Recherchons une solution indépendante de f_0 :
On considère une fonction z telle que $y=f_0z$.
On a alors $y'=f_0'z+f_0z'$ et $y''=f_0''z+2f_0'z'+f_0z''$ et ainsi :

$$\begin{aligned}(E) &\iff \left(t^2+t\right)\left(f_0''z+2f_0'z'+f_0z''\right)+(3t+1)\left(f_0'z+f_0z'\right)+f_0z=0\\ &\iff 2\left(t^2+t\right)f_0'z'+\left(t^2+t\right)f_0z''+(3t+1)f_0z'=0\text{ (car }y\text{ solution de }(E))\\ &\iff \frac{-2t}{1+t}z'+tz''+\frac{3t+1}{1+t}z'=0\text{ (en reprenant l' expression de }f_0)\\ &\iff z''+\frac{1}{t}z'=0\end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C_1\in\mathbb{R}$ telle que sur chacun des 3 intervalles précédents on ait $z'(t)=\frac{C_1}{t}$. Ainsi, il existe également $C_2\in\mathbb{R}$ telle que $z(t)=C_1\ln(|t|)+C_2$ sur chacun des 3 intervalles précédents.

Finalement, en posant $g_0 : t \longmapsto \frac{\ln(|t|)}{1+t}$, on trouve que g_0 est une solution de (E) sur chacun des 3 intervalles et on a alors $\mathcal{S}_{(E)} = \mathbb{R}f_0 \oplus \mathbb{R}g_0$.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Pour aller plus loin...

Le développement en série entière au voisinage de 0 est très utilisé lorsque les équations différentielles sont linéaires mais non résolubles de manière directe. On peut alors espérer trouver des solutions mais pas forcément toutes les solutions !

Le cas échéant, on peut alors développer une éventuelle solution sous une autre forme, comme par exemple $\sum t^{n+\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ ou encore $\sum t^n \ln(t)$. On peut ensuite regarder si on peut les prolonger et faire des prolongements par raccordements (ce qui n'est pas le cas ici).

II.2 Recasages

Recasages : 220 - 221 - 228 - 243.

III Bibliographie

— Florent Berthelin, *Équations différentielles*.